



**Григорян Мара Эдиковна**, аспирант Нижегородского государственного педагогического университета им. Н.И. Лобачевского

**Залесский Михаил Львович**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Нижегородского государственного университета им. Н.Н. Лобачевского, г. Нижний Новгород

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

В статье рассматриваются основные подходы к определению понятия вероятности с точки зрения современных представлений, выделяются основные характеристики этих определений и области их применения.

**Ключевые слова:** понятие вероятности; испытание; случайное событие; полная группа событий; элементарный исход; пространство элементарных исходов; благоприятствующие элементарные исходы; равновозможные элементарные исходы.

Анализ понятия вероятности с социально-исторических позиций показывает, что его формирование заняло длительный промежуток времени, на протяжении которого происходило непрерывное совершенствование формулировки. В процессе развития теории вероятностей учёными были предложены различные подходы к определению понятия вероятности. Рассмотрим данные подходы с точки зрения современных представлений. Выделим основные характеристики этих определений и области их применения. Для краткости приведём их в виде таблицы.

Проведённый анализ понятия вероятности позволяет предложить следующие принципы построения методики обучения понятия вероятности случайного события:

### 1. Ведение основных понятий теории вероятностей

Прежде чем ввести понятие вероятности, необходимо разобрать со студентами следующие базовые понятия: испытание, случайное событие, полная группа событий, элементарный исход, пространство элементарных



## Основные подходы к интерпретации понятия вероятности

Определение	Характеристики	Область применения
<b>Классическая (априорная) интерпретация</b>		
Вероятностью события называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.	1) число элементарных исходов испытания конечно; 2) результат испытания представлен в виде совокупности элементарных событий; 3) элементарные события должны быть равновозможными.	имеет очень ограниченную сферу использования: оно применимо только к анализу экспериментов с конечным числом равновозможных исходов.
<b>Статистическая (апостериорная) интерпретация</b>		
Статистической вероятностью события $A$ называется относительная частота появления события $A$ в $n$ произведённых испытаниях, то есть $\hat{P}(A) = w(A) = \frac{m}{n}$ , где $m$ — число испытаний, в которых событие $A$ наступило; $n$ — общее число произведённых испытаний.	1) тесная связь с практикой; 2) требуется, чтобы испытания производились в действительности; 3) неоднозначность статистической вероятности.	демография, статистика, страхование, медицина, физика, контроль качества продукции.
<b>Геометрическая интерпретация</b>		
Если обозначить меру (длину, площадь, объём) области $G$ через $mes G$ , то вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область $g$ — часть области $G$ , равна $P = \frac{mes g}{mes G}$ .	применяется для испытаний с бесконечным числом исходов.	физика, биология, медицина, инженерное дело и т.д.



Определение	Характеристики	Область применения
<b>Аксиоматическая интерпретация</b>		
<p>Пусть <math>\Omega</math> — множество всех возможных исходов некоторого опыта (эксперимента),  <math>A</math> — подмножество множества <math>\Omega</math>.</p> <p>1. Каждому случайному событию <math>A</math> поставлено в соответствие неотрицательное число <math>P(A)</math>, называемое его вероятностью <math>P(A) \geq 0</math>.</p> <p>2. <math>P(\Omega) = 1</math>.</p> <p>3. Если события <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> попарно несовместимы, то <math>P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)</math>.</p> <p>Вероятность является <i>функцией</i> со значением в интервале от 0 до 1, определённой на некоторой сигма-алгебре событий и удовлетворяющей некоторым условиям.</p>		создаёт логический порядок в вероятностной теории, но не указывает, как найти эти вероятности на практике.
<b>Субъективная интерпретация</b>		
<p>Субъективными вероятностями событий называются вероятности, удовлетворяющие аксиомам аксиоматического определения, приписанные событиям на основе личного опыта экспертов.</p>	<p>степень веры индивида в возможность того, что событие произойдёт, как мера личного доверия к утверждению.</p>	<p>экономика, политология, социология.</p>

исходов, благоприятствующие элементарные исходы, равновозможные элементарные исходы[3].

**Испытанием** в теории вероятностей называется осуществление какого-либо комплекса условий, при котором наблюдается данное явление. Предполагается, что данный комплекс условий может быть воспроизведён сколь угодно большое число раз. Итак, в теории вероятностей вместо слов «произведено наблюдение

при осуществлении определённого комплекса условий» говорят кратко «произведено испытание».

Под *случайным опытом*, или *случайным испытанием*, будем понимать любое действие:

- которое можно повторить большое количество раз;
- в приблизительно одинаковых условиях;
- результаты которого предсказать невозможно.

**Событием** называется всякий факт, который может наступить в результате испытания. События обозначаются большими латинскими буквами, возможно с индексами или штрихами:  $A, B, C, \dots A_1, \dots, A', \dots$

**Вероятность** случайного события — количественная мера объективной возможности его осуществления.

**Пример.** Бросается игральный кубик. Это испытание. При этом выполняется следующий комплекс условий: кубик сделан из однородного материала, грани его занумерованы от 1 до 6, падает он на ровную горизонтальную поверхность. Выпадение, например, шести очков — событие.

Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида:

**Элементарным исходом** (или элементарным событием) называют любой простейший (т. е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта.

Множество всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных исходов**.

Другими словами, множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;

	<b>Достоверное</b>	<b>Невозможное</b>	<b>Случайное</b>
<b>Определение</b>	событие, которое обязательно произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий $S$ .	событие, которое заведомо не произойдёт, если будет осуществлена совокупность условий $S$ .	событие, которое при осуществлении совокупности условий $S$ может либо произойти, либо не произойти.
<b>Пример</b>	если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре $20^\circ$ , то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. Заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий $S$ .	событие «вода в сосуде находится в твёрдом состоянии» заведомо не произойдёт, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.	если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал герб» — случайное.
<b>P</b>	1	0	[0; 1]



- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Случайным событием (или короче, событием) называют произвольное подмножество (часть) пространства элементарных исходов опыта. В частности, каждый элементарный исход ПЭИ является событием, всё ПЭИ является событием.

**Пример.** Производится опрос, связанный с планами улучшения жилищных условий работников большого предприятия. Каждому из опрашиваемых задают два вопроса:

— Удовлетворены ли вы качеством жилья?

— Удовлетворены ли вы удалённостью квартиры от места работы?

Опишем ПЭИ опыта, заключающегося в опросе одного человека. Будем обозначать утвердительный ответ на вопрос цифрой 1, а отрицательный — 0. Тогда запись 10 означает, что опрашиваемый на первый вопрос ответил утвердительно, а на второй — отрицательно. ПЭИ опыта, заключающегося в опросе одного человека, имеет вид:  $U = \{11, 10, 01, 00\}$ .

Два случайных события называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

## 2. Изучение различных подходов к интерпретации понятия вероятности

Необходимо изучить различные подходы к интерпретации понятия вероятности. В противном случае происходит неполное представление о нём. При введении каждого из определений вероятности необходимо обращать внимание студентов на его недостатки и области возможного применения [5].

## 3. Включение элементов истории математики в процесс обучения

Развитие понятия вероятности в сознании учащихся в некоторой степени повторяет историческое развитие, которое это понятие прошло в течение всей истории развития математики. Чтобы помочь студентам преодолеть трудности в понимании понятия вероятности целесообразно познакомить студентов с динамикой развития понятия вероятности, решить некоторые историче-

## Исторические сведения по теории вероятностей и цели их применения

Исторические сведения и формы их применения	Цели применения элементов истории развития теории вероятностей
<p><b>Тема занятия: «Предмет теории вероятностей и математической статистики. Испытания и события».</b></p>	
<p>Разработка презентаций на темы: «Этапы развития теории вероятностей», «Роль теории вероятностей в эволюции формирования научной картины мира», «Роль математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы»</p>	<p>Формирование научной картины мира. Формирование понимания сущности и социальной значимости будущей профессии и умения проявлять к ней устойчивый интерес</p>
<p><b>Тема занятия: «Основные формулы комбинаторики»</b></p>	
<p>Решение исторических задач. Эссе на тему: «Бином Ньютона, треугольник Паскаля и связь между ними». Доклады учащихся о биографиях учёных: Джироламо Кардано, Никколо Тарталья, Блез Паскаль, Пьер де Ферма</p>	<p>Развитие ведущих математических понятий, идей и методов (разобраться в том, чем стимулируются математические открытия, познакомить студентов, с самим понятием творчества, с творчеством в науке)</p>
<p><b>Тема занятия: «Классическая и статистическая интерпретации понятия вероятности. Субъективная вероятность»</b></p>	
<p>Эссе учащихся на тему: «Социально-исторический, лингвистический анализ понятия вероятности (этимология, различные определения и трактовки, антонимы и синонимы, динамика формирования понятия и т.д.)»</p>	<p>Формирование знаний об источниках получения вероятностей для их использования в реальной жизни: (с помощью эксперимента, используя формулы или на основе экспертных заключений)</p>



Исторические сведения и формы их применения	Цели применения элементов истории развития теории вероятностей
<i>Тема занятия: «Аксиоматическая интерпретация вероятности»</i>	
Рефераты учащихся на темы: «Аксиоматический метод в математике», «Аксиоматизация теории вероятностей», «Вклад Андрея Николаевича Колмогорова в развитие теории вероятностей и математической статистики».	Формирование понимания того, как развивались математические методы. Формирование уважения к своему народу, гордости за свою Родину.
<i>В течение изучения всего курса студенты работают над коллективными проектами по теории вероятностей.</i>	
Разработка проектов на темы: «Парадокс игры в кости. Азартные игры в мире физических частиц», «Парадокс времени ожидания», «Задача Бюффона», «Санкт-Петербургский парадокс», «Парадокс де Муавра и экономия энергии» и т.д. [3, 5].	Развитие способностей к аналитическому, критическому и творческому мышлению; самостоятельное приобретение недостающих знаний из разных источников; развитие способности применять знания к жизненным ситуациям; использование информационно-коммуникационных технологий в учебной деятельности; продуктивная работа в коллективе.

ские задачи теории вероятностей[1]. Например, можно проанализировать парадокс де Мере. Этот парадокс стимулирует обучающихся к постоянному контролю предлагаемой информации и поиску ошибок. Анализ «решений» этого парадокса позволяет обратить внимание учащихся на необходимость правильного описания пространства элементарных событий при решении любой вероятностной задачи[2].

Приведём несколько примеров использования исторических сведений в процессе изучения теории вероятностей.

#### **4. Анализ источников получения вероятностей**

Необходимо проанализировать со студентами источники получения вероятностей для их использования

в реальной жизни: непосредственный подсчёт вероятности события; экспериментальное определение вероятности события как предела относительной частоты его появления в серии опытов при увеличении их числа; вычисление вероятности одного события по известным вероятностям других событий, с ним связанных; экспертная оценка величины вероятности событий[4].

## 5. Подбор системы задач

При проектировании учебного процесса необходимо предусмотреть задания, обеспечивающие актуализацию прошлого опыта и мотивацию к изучению нового, включить задания, направленные на освоение нового

учебного материала. Рефлексивно-оценочная часть учебной деятельности должна быть обеспечена заданиями, направленными на формирование регулятивных универсальных учебных действий, обеспечивающих становление и развитие действий самоанализа, самоконтроля и самооценки в процессе обучения математике[6].

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод о том, что, существуют различные подходы к интерпретации понятия вероятности, которые выявлялись исторически в процессе познания. Все они не противоречат, а дополняют и обобщают друг друга. Каждая интерпретация вероятности составляет основу вероятностных методов исследования, применяемых в определённых областях научной и практической деятельности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Болдыревский П.Б., Григорян М.Э., Зимина С.В.* Ситуационные задачи в процессе обучения теории вероятностей как одно из средств реализации проектно-ориентированного метода в высшей школе // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2014. — № 3–4. — С. 28–31.
2. *Григорян М.Э., Болдыревский П.Б.* Роль истории развития теории вероятностей в формировании у студентов научной картины мира как основы мировоззрения // Успехи современного естествознания. — 2014. — № 12–2. — С. 133–137.
3. *Григорян М.Э.* Дидактические функции истории математики // Успехи современного естествознания. — 2014. — № 11–2. — С. 84–86.
4. *Григорян М.Э.* Методика включения элементов истории математики в процесс обучения теории вероятностей студентов среднего профессионального образования // Современные проблемы науки и образования. — 2014. — № 4. — С. 26.
5. *Григорян М.Э.* Роль парадоксов в процессе обучения теории вероятностей студентов среднего профессионального образования // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2013. — № 12 (90). — С. 177–179.
6. *Перевощикова Е.Н.* Специфика формирования универсальных учебных действий при обучении математике в основной школе // Интеграция образования. — 2015. Т. 19. — № 2 (79). — С. 81–91.